π

π ist der sechzehnte Buchstabe des griechischen Alphabets und wird etwa seit 300 Jahren als Symbol für die Kreiszahl geschrieben (William Jones 1706). Für die allgemeine Akzeptanz dieser Bezeichnung hat insbesondere Leonhard Euler (1707 – 1783) gesorgt, da er sie ab 1736 konsequent verwendete. *„Kein anderes mathematisches Symbol hat wohl soviel Rätselraten, romantische Spekulation, falsche Vorstellungen und Interesse hervorgerufen wie die Zahl π"* lesen wir in David Blatners Buch π *, Magie einer Zahl*.
Die Kreiszahl definiert man als Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser eines Kreises. π ist eine Zahl, deren Dezimaldarstellung weder abbricht noch eine Periode besitzt. Damit ist π keine rationale Zahl (Bruchzahl), man bezeichnet solche Zahlen als irrational.
Auf dem Kalenderblatt sehen wir die ersten 288 Stellen der Dezimaldarstellung. Etwas Zahlenmystik darf nicht fehlen. Wir betrachten die Hälfte aufgeführten Dezimalstellen, also die ersten 144. Deren Summe ergibt 666. Diese Zahl bezeichnet der Ulmer Rechenmeister Johannes Faulhaber (1580 – 1635) in seiner Schrift Miracula Arithmetica als heilige Zahl in der viel „Unerhörtes" steckt. Bereits in der Bibel (Offenbarung des Johannes) wird vor dieser Zahl gewarnt, sie wird mit dem Teufel in Verbindung gebracht. Buchstaben bekommen Zahlen zugeordnet. Addieren sich die Zahlenwerte der Buchstaben eines Namens zur Zahl 666, dann handelt es sich um eine böse Person. Wieso weist man gerade der Zahl 666 eine besondere Bedeutung zu? Hier lassen sich nur Vermutungen anstellen. Die Zahlenmystik hatte im Mittelalter Hochkonjunktur. Damals waren die römischen Zahlzeichen gebräuchlich. Um 666 in der römischen Darstellung zu schreiben, braucht man nur die unterschiedlichen Zeichen nacheinander anführen: DCLXVI.
Noch eine Bemerkung zur Anzahl der betrachteten Dezimalstellen von π: Bereits hier dominiert die Zahl 6, denn $144 = (6 + 6) \cdot (6 + 6)$.
Interessant wäre es, beim Betrachten des Bildes ein bestimmtes Muster, also eine Art von Regelmäßigkeit in den Dezimalstellen zu finden. Gibt es beispielsweise eine Ziffer, die besonders häufig vorkommt? Bislang allerdings Fehlanzeige, trotz großer Bemühungen und obwohl man bereits über 200 Milliarden Dezimalstellen berechnet hat.
Diese enormen Stellenzahlen haben übrigens keinerlei Nutzen für praktische Berechnungen mit der Kreiszahl selbst. Der Umfang eines Kreises mit Radius 30 Meter (oder weniger) lässt sich beispielsweise auf einen Millimeter genau bestimmen, wenn lediglich 4 Dezimalen von π bekannt sind. Zwei kanadische Mathematiker haben festgestellt, dass bereits 39 Dezimalstellen von π genügen, um den Umfang eines Kreises um das bekannte Universum mit einem Fehler zu berechnen, der kleiner ist als die Größe eines Wasserstoffatoms.
Weil man kein Muster kennt, erweist sich das Einprägen einer großen Anzahl von Dezimalstellen von π immer wieder als eine Herausforderung für Gedächtnisakrobaten. Im Fernsehen konnte man schon erstaunliche Kostproben erleben. Für Normalverbraucher gibt es Gedichte in vielen Sprachen, wobei die Buchstabenzahl der einzelnen Wörter der jeweiligen Dezimalstelle von π entspricht. Zwei Kostproben:

> *Now I want a drink, alcoholic of course,*
> *after the heavy lectures involving quantum mechanics!*

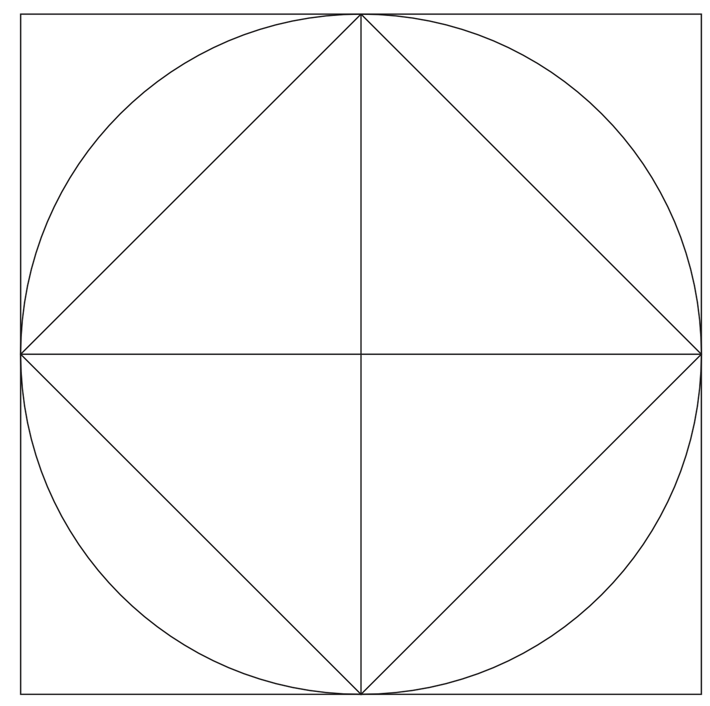
> *Wie? O! Dies π*
> *Macht ernstlich so vielen viele Müh'!*
> *Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,*
> *Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!*

Das deutschsprachige „Gedicht" liefert die ersten 23 Stellen von π. Zum Glück ist die 32. Stelle eine Null, so dass diese Art der Dichtkunst ein schnelles Ende findet.
Eingerahmt hat Eugen Jost sein Bild mit einem Zitat aus der Bibel. Hier macht man sich wenig Gedanken um die Dezimalstellen. Im Alten Testament (Buch der Könige) heißt es über einen Altar im Tempel Salomons:

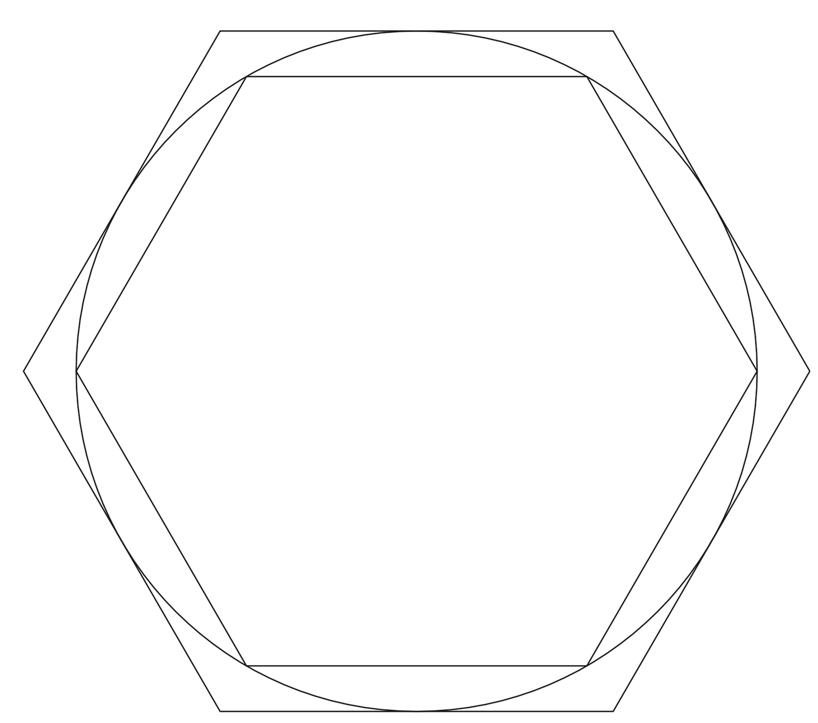
> *„Und er machte ein Meer, gegossen von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundumher und fünf Ellen hoch und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß ringsum."*

Dies ergibt den Wert 3 für π.

Ein Kreis mit Radius 1 besitzt den Flächeninhalt π. Eine erste grobe Abschätzung für π erhält man, indem man dem Einheitskreis ein Quadrat sowohl umbeschreibt als auch eines einbeschreibt.



Bereits Archimedes (287 – 212 v. Chr.) erkannte, dass man π nicht exakt berechnen, sondern nur systematisch annähern kann. Er startete mit regelmäßigen Sechsecken, die er dem Einheitskreis ein- und umbeschrieb.



Durch Verdoppelung der Eckenzahl gelangte er bis zum 96-Eck. Damit erhielt er folgende Abschätzung für π:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{10}{70}$$

oder in dezimaler Schreibweise:

$$3{,}140845 < \pi < 3{,}142858$$

π ist nicht nur irrational, sondern auch transzendent!

Da sich π nicht als Bruch darstellen lässt, ist es eine irrationale Zahl. Die rationalen Zahlen – also die Bruchzahlen – und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die sog. reellen Zahlen. Eine andere Art der Einteilung der Zahlen orientiert sich an der Eigenschaft, ob die Zahl sich durch eine Polynomgleichung beschreiben lässt.
Zunächst müssen wir erklären, was eine Polynomgleichung ist. Beispiele dafür sind lineare Gleichungen wie $4x + 7 = 0$ bzw. quadratische Gleichungen wie $x^2 + 12x + 4 = 0$. Unter einer allgemeinen Polynomgleichung von Grad n versteht man einen Ausdruck der Form:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist und die Koeffizienten a_k rationale Zahlen sind. Zahlen, die Lösung einer solchen Polynomgleichung sind, heißen algebraisch.

So sind alle rationalen Zahlen algebraisch, denn beispielsweise ist $\frac{5}{8}$ Lösung der Gleichung $8x = 5$. Auch viele irrationale Zahlen sind algebraisch. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$.
Alle anderen reellen Zahlen, die also nicht algebraisch sind, nennt man transzendent, denn sie „Übersteigen" jede algebraische Gleichung.
Im Jahr 1882 bewies Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) die Transzendenz von π und löste damit eines der klassischen Probleme der Antike. Mit seinem Ergebnis stellte er klar, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten nicht möglich ist. Bereits neun Jahre zuvor zeigt Charles Hermite (1822 – 1901), dass die eulersche Zahl e transzendent ist. π und e sind die beiden Standardbeispiele für transzendente Zahlen, die man im Mathematikunterricht in der Schule kennenlernt.

Unendliche Reihen und Produkte

Wenn wir die Quadratzahlen der Größe nach aufschreiben und addieren

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots,$$

dann wächst der Wert dieser Summe sicherlich über jede Schranke. Jetzt betrachten wir nicht die Quadratzahlen selbst, sondern die Summe der reziproken Quadratzahlen, also

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Diese Summe besteht zwar auch aus unendlich vielen positiven Summanden, aber dennoch wächst sie nicht über jede Schranke, sie besitzt einen endlichen Wert. Dies konnte Jakob Bernoulli (1654 – 1705) beweisen, ihm gelang es aber nicht, den Wert zu bestimmen. Leonhard Euler (1707 – 1783) löste dann 1736 das Rätsel. Auf geschickte Weise erhielt er mit Hilfe der Sinusreihe den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ für die unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen. Es ist schon erstaunlich, dass bei einer solchen Reihe plötzlich die Kreiszahl auftaucht und sich somit ein zunächst unvermuteter Zusammenhang ergibt.
Eine ebenso schöne wie erstaunlich einfache Darstellung entwickelte der schottische Mathematiker James Gregory (1638 – 1675) aus der Reihenentwicklung für den Arcustangens:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Es gibt nicht nur unendliche Summen, sondern auch unendliche Produkte. Auch diese liefern Formeln für π. Leicht zu merken ist das Ergebnis von John Wallis (1616 – 1703):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots$$

Den Boom für solche Darstellungen für π lösten die Fortschritte in der Analysis aus. Ab der Mitte des 17. Jahrhunderts standen den Mathematikern entsprechende Methoden zur Verfügung, deren Anwendungen eine Fülle von Zusammenhängen von π mit unendlichen Reihen und Produkten lieferten.

Literatur zum Thema

Basieux, Pierre: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt-Verlag 2000
Beckmann, Petr: A History of π. St. Martin's Press 1971
Berggren, Lennart u.a.: Pi: A Source Book. Springer-Verlag 1997
Blatner, David: π, Magie einer Zahl. Rowohlt-Verlag 2000

Hardys Taxi

"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas. ... The mathematician's patterns, like the painter's or poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics. ..."

Diese Feststellung des „Taxi-Fahrers" Godfrey Harold Hardy (1877–1947) passt auch als Leitmotiv für diesen Kalender. Zunächst eine prägnante Charakterisierung der Person Hardy: Ein brillanter, äußerst produktiver Mathematiker und - ein Exzentriker. Er kokettierte u.a. damit, dass er in seinem Leben nie etwas Nützliches gemacht habe. Was natürlich so überhaupt nicht stimmt.

Von seinen Zeitgenossen wird er als Schönling beschrieben. Er hasste es aber, sich selbst zu sehen. Daher gab es in seiner Wohnung keine Spiegel. Er rasierte sich zeitlebens „blind". In Hotelzimmern verhängte er als erstes die Spiegel mit Handtüchern.

Hardys Arbeitsgebiet war die Zahlentheorie. Bereits als Kind zerlegte er in der Kirche die Liednummern in ihre Primfaktoren. Das Thema „Primzahlen" beschäftigte ihn dann sein Leben lang, insbesondere interessierte er sich für die Verteilung dieser Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlen. In diesem Zusammenhang befasste er sich intensiv mit der sog. Riemannschen Vermutung, die bis heute noch nicht bewiesen ist.

Zu den großen Verdiensten Hardys gehört auch, dass er den genialen indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887–1920), der nie eine formale mathematische Ausbildung erhalten hatte, nach Cambridge holte. Menschlich fanden beide leider nie zueinander. Ramanujan fühlte sich in England überhaupt nicht wohl, er litt unter dem Klima und der ungewohnten Ernährung. Wegen des ersten Weltkriegs konnte er viele Jahre nicht in seine Heimat zurückkehren.

Die mathematischen Diskussionen der beiden waren dagegen mehr als anregend und gewinnbringend. Das unkonventionelle, fantastische indische Mathematikwunder prallte auf die logisch strukturierte scharf denkende westliche Gedankenwelt. Spannend nachzulesen in dem Buch *Der das Unendliche kannte*.

Mathematische Ergebnisse sprudelten aus Ramanujan geradezu heraus, wie folgendes Beispiel illustriert. Bei einem Besuch bei dem kranken indischen Gast konnte Hardy seine Anteilnahme nicht zum Ausdruck bringen. Um irgendetwas zu sagen, erwähnte er, dass die Nummer des Taxis, mit dem er gekommen war, nämlich 1729, eine ziemlich uninteressante Zahl sei. Doch Ramanujan entgegnete: „Nein, nein Hardy, das stimmt nicht. 1729 ist eine sehr interessante Zahl. Es ist die kleinste Zahl, die sich auf zwei verschieden Weisen als Summe zweier Kuben schreiben lässt." ($1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$). Diese Anekdote führt uns zu einem bis heute noch nicht vollständig gelösten Problem. Es geht hier um die Frage, welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von dritten Potenzen (also Kuben) zweier ganzer Zahlen oder zweier Brüche schreiben?

Über den Taxifahrer dürfen wir aber nicht die zahlreichen Fahrgäste vergessen. Bei Hardy kommen als Insassen des Taxis natürlich nur Zahlen in Betracht, und zwar Zahlen mit besonderen Eigenschaften bzw. besondere Zahlenfolgen. Einige sind im Bild sehr deutlich zu erkennen, andere verstecken sich etwas. Ich greife einige wenige heraus: Natürliche Zahlen, Quadratzahlen, Dreieckszahlen, Fibonacci-Zahlen, Zweierpotenzen, römische Zahlzeichen, Fingerzahlen usw.

Links oben finden wir die Nummer des Taxis, nämlich die 1729, mit der eben erwähnten Zerlegung. Daneben sehen wir die Zahlen 6, 28, 496, 8128, … Zur Erläuterung dieser Zahlenfolge muss ich etwas weiter ausholen.

Wenn wir den Namen Pythagoras hören, denken wir zunächst an den nach ihm benannten Lehrsatz, also an die Konfiguration aus dem rechtwinkligen Dreieck mit Quadraten über den Seiten. Wir verbinden Pythagoras mit einer Aussage aus der Geometrie. Der Name Pythagoras galt aber jahrhundertelang als Synonym für Arithmetik. „Alles ist Zahl" lautete das Credo der Pythagoreer, das wir für diesen Kalender übernommen haben. Wie sah bei den Pythagoreern die Beschäftigung mit Zahlen aus? Sie befassten sich mit geraden und ungeraden Zahlen. Sie versuchten Zahlen in ihre Teile zu zerlegen. In unserer heutigen Terminologie bedeutet das die Bestimmung der Teiler einer Zahl. So entdeckten sie Zahlen, die sich nicht zerlegen lassen, nämlich die sog. Primzahlen. Hier gibt es nur die beiden trivialen Teiler 1 und die Zahl selbst. Alle anderen Zahlen haben mehr als zwei Teiler und heißen zusammengesetzt. Irgendwann kam jemand auf die Idee, alle echten Teiler einer Zahl, das sind alle Teiler außer der Zahl selbst, zusammenzuzählen. Betrachten wir einige Beispiele:

Echte Teiler von 8:	1, 2, 4;	$1 + 2 + 4 = 7 < 8$.
Echte Teiler von 15:	1, 3, 5;	$1 + 3 + 5 = 9 < 15$.
Echte Teiler von 12:	1, 2, 3, 4, 6;	$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$.

Unsere Beispiele zeigen: Die Summe der echten Teiler kann größer oder kleiner als die Zahl sein. Es gibt aber auch Zahlen, die mit der Summe ihrer echten Teiler übereinstimmen, wie z.B. die Zahl 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Solche Zahlen nannten die Pythagoreer vollkommen.

In der Antike, aber auch noch im Mittelalter, schrieb man Zahlen eine mystische Bedeutung zu. Dies galt natürlich auch für die vollkommenen Zahlen. Der heilige Augustinus (354–430) stellte fest:

„6 ist eine vollkommene Zahl in sich selbst und nicht etwa, weil Gott alle Dinge in 6 Tagen geschaffen hat; vielmehr ist das Umgekehrte wahr: Gott schuf alle Dinge in 6 Tagen, weil diese Zahl vollkommen ist."

Die nächsten vollkommenen Zahlen nach der 6 sind die Zahlen 28, 496 und 8128. Diesen Kenntnisstand hatten bereits griechische Gelehrte in der Spätantike, wie Nikomachos von Gerasa (ca. 130 n. Chr.) und Jamblichos von Chalkis (ca. 250–330). Weitere vollkommene Zahlen wurden anscheinend nicht berechnet, obwohl im neunten Buch der Elemente des Euklid ein Verfahren zur Erzeugung dieser Zahlen beschrieben und bewiesen wird; und dieses grundlegende Werk stammt aus der Zeit um 300 v. Chr., also etwa 600 Jahre vor Jamblichos.

Die vier konkret vorliegenden vollkommenen Zahlen verführten Jamblichos zu diversen Spekulationen:

- Zu jeder Anzahl von Ziffern gibt es genau eine vollkommene Zahl.
- Alle vollkommenen Zahlen enden auf 6 oder 8, wobei 6 und 8 sich abwechseln.

Schauen wir uns die nächsten vollkommenen Zahlen an:

33 550 336
8 589 869 056
37 438 691 328

Dumm gelaufen für Jamblichos. Mit seinen Spekulationen liegt er total daneben. Die fünfte vollkommene Zahl besteht bereits aus 8 Ziffern. Bislang sind zwar nur vollkommene Zahlen bekannt, die auf 6 oder 8 enden, aber die Abfolge der Einerstelle wechselt nicht jedes Mal. Die fünfte und sechste Zahl enden beispielsweise jeweils auf 6. Was lernen wir daraus? Nie zu früh verallgemeinern!

Bereits das Auffinden der fünften, sechsten oder gar der siebten vollkommenen Zahl allein durch Ausprobieren erweist sich als sehr mühsam. Die Zahlen sind doch schon ziemlich groß, wie wir gesehen haben.

Wir suchen daher nach einer effizienteren Methode. Um eine solche zu finden, bestimmen wir zunächst weitere Eigenschaften der bekannten vollkommenen Zahlen. Wir spielen Hardy in der Kirche, aber statt der Liednummern zerlegen wir die vier ersten noch „handlichen" vollkommenen Zahlen in Primfaktoren.

$$6 = 2 \cdot 3$$
$$28 = 2^2 \cdot 7$$
$$496 = 2^4 \cdot 31$$
$$8128 = 2^6 \cdot 127$$

Jede der Zahlen lässt sich somit als Produkt einer Zweierpotenz und einer weiteren Primzahl darstellen. Die hier auftretenden Primzahlen hängen wiederum eng mit Zweierpotenzen zusammen.

Es gilt nämlich:

$$3 = 2^2 - 1$$
$$7 = 2^3 - 1$$
$$31 = 2^5 - 1$$
$$127 = 2^7 - 1$$

Damit erhalten wir insgesamt folgende Zerlegung:

$$6 = 2^1 (2^2 - 1)$$
$$28 = 2^2 (2^3 - 1)$$
$$496 = 2^4 (2^5 - 1)$$
$$8128 = 2^6 (2^7 - 1)$$

Das Zerlegen in die Primfaktoren offenbart das gemeinsame Muster. Dieses lässt sich allgemein formulieren, und wir gelangen zu folgender Vermutung:

Ist $2^m - 1$, $m > 1$, eine Primzahl,
dann ist $2^{m-1} (2^m - 1)$ eine vollkommene Zahl.

Mit dieser Vermutung haben wir uns nicht verspekuliert wie Jamblichos. Diese Aussage und der zugehörige Beweis sind schon seit über 2000 Jahren bekannt. Sie finden sich bereits in den Elementen des Euklid.

Einige Bemerkungen zu vollkommenen Zahlen:

- Es gibt anscheinend nicht besonders viele vollkommene Zahlen. Bislang sind nicht einmal 50 bekannt. Zahlen sind anscheinend auch nicht besser als Menschen! Aber kennen Sie 50 vollkommene Menschen?
- Alle bisher bekannten vollkommenen Zahlen sind gerade und enden auf 6 oder 8.
- Die geraden vollkommenen Zahlen sind Dreieckszahlen.
- Auch hier treten Kuben (dritte Potenzen) auf, denen wir schon bei der Zerlegung der Nummer des Taxis begegneten. Denn jede vollkommene Zahl (> 6) ist die Summe aufeinander folgender ungerader dritter Potenzen.

  Zwei Beispiele: $28 = 1^3 + 3^3$
  $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$

  Bilden Sie die entsprechende Summe für die nächsten beiden vollkommenen Zahlen. Entdecken Sie ein Muster?

Von Martin Gardner, dem Autor der mathematischen Kolumne im Scientific American, stammt die Feststellung:

„One would be hard put to find a set of whole numbers with a more fascinating history and more elegant properties, surrounded by greater depths of mystery – and more totally useless – than the perfect numbers."

Perfect numbers, das sind die vollkommenen Zahlen. Man erhält sie übrigens als „Nebenprodukt" bei der Erzeugung großer Primzahlen. Hierzu untersucht man Zahlen der Form $2^m - 1$, sog. Mersenne-Zahlen. Benannt sind sie nach dem französischen Minoritenpater Marin Mersenne (1588–1648), der eine provokante, aber nur teilweise richtige Aussage über deren Primzahleigenschaft machte. Bei der Jagd nach großen Primzahlen testet man Mersenne-Zahlen auf ihre Primzahleigenschaft. Und mit jeder neuen Mersenne-Primzahl erhält man mit Hilfe des obigen Ergebnisses von Euklid eine neue vollkommene Zahl. Die aktuellsten Informationen zu diesem Thema finden Sie im Internet unter der Adresse

http://www.utm.edu/research/primes/largest.html

Literatur zum Thema

Basieux, Pierre: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt-Verlag 2000

Kanigel, Robert: Der das Unendliche kannte. Das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan. Vieweg-Verlag 1993