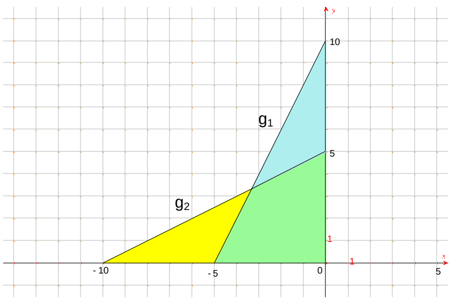
Lernumgebung „Geradengleichungen“

Material
Verschiedene Dreiecksformen
Koordinatensystem
Kärtchen

Mit Formen kann man in einem Koordinatensystem Geraden erzeugen. Von den Geraden können die Geradengleichungen bestimmt werden.



Anordnung zu Aufgabe 1A

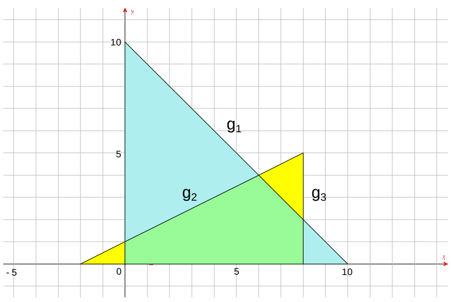
1 Geraden mit positiver Steigung legen und Schnittpunkte erzeugen

A Lege zwei Formen 10 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Zeichnung.

B Stelle die Geradengleichungen der Geraden g_1 und g_2 auf.

C Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt P der beiden Geraden und überprüfe das Resultat anhand der Zeichnung.

D Wiederhole Aufgabe 1A-C mit der Form 8.



Anordnung zu Aufgabe 2A

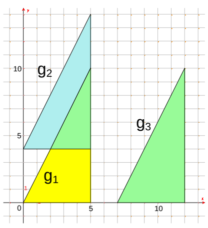
2 Geraden legen und Schnittpunkte berechnen

A Lege die Formen 6 und 10 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Zeichnung.

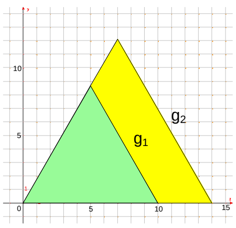
B Stelle die Geradengleichungen der Geraden g_1, g_2 und g_3 auf.

C Bestimme rechnerisch die Schnittpunkte der drei Geraden und überprüfe das Resultat anhand der Zeichnung.

D Lege die Formen 6 und 10 noch anders ins Koordinatensystem und verfahre wie in Aufgabe 2B-C.



Anordnung zu Aufgabe 3A



Anordnung zu Aufgabe 3D

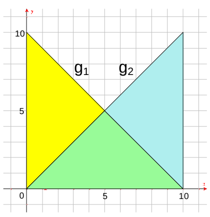
3 Parallele Geraden untersuchen

A Lege drei Formen 10 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Zeichnung.

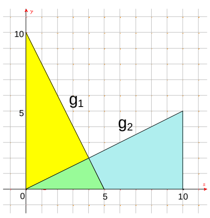
B Stelle die Geradengleichungen der Geraden g_1, g_2 und g_3 auf.

C Vergleiche die Geradengleichungen miteinander und begründe deine Feststellungen.

D Wiederhole Aufgabe 3A-C mit den Formen 5 und 11.



Anordnung zu Aufgabe 4A



Anordnung zu Aufgabe 4D

4 Senkrechte Geraden untersuchen

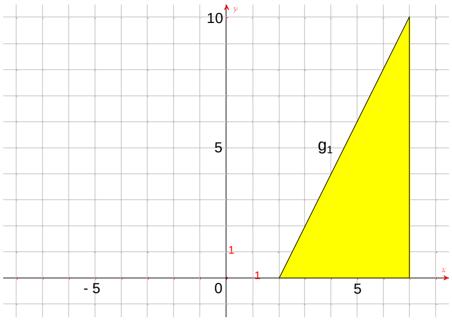
A Lege zwei Formen 6 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Zeichnung.

B Stelle die Geradengleichungen der Geraden g_1 und g_2 auf.

C Vergleiche die Steigung der beiden Geraden miteinander und begründe deine Feststellungen.

D Wiederhole Aufgabe 4A-C mit zwei Formen 10.

5 Geraden an den Koordinatenachsen und am Nullpunkt spiegeln



Anordnung zu Aufgabe 5

A Lege eine Form 10 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Skizze.

B Stelle die Geradengleichung für die Gerade g_1 auf.

C Spiegle die Gerade g_1 an der y-Achse und stelle die Geradengleichung der gespiegelten Geraden auf.

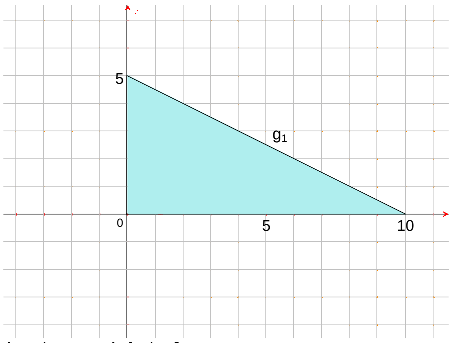
D Spiegle die Gerade g_1 an der x-Achse und stelle die Geradengleichung der gespiegelten Geraden auf.

E Spiegle die Gerade g_1 am Nullpunkt und stelle die Geradengleichung der gespiegelten Geraden auf.

F Vergleiche die Resultate und begründe deine Feststellungen.

---

6 Geraden an den Achsen y = x und y = – x spiegeln



Anordnung zu Aufgabe 6

A Lege eine Form 10 wie links abgebildet in ein Koordinatensystem und mache eine Zeichnung.

B Stelle die Geradengleichung für die Gerade g_1 auf.

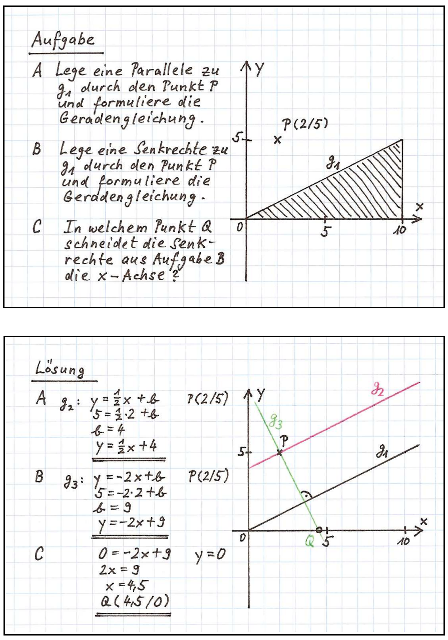
C Spiegle die Gerade g_1 an der Geraden y = x, skizziere die Lösung und stelle die Geradengleichung der gespiegelten Geraden auf.

D Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt der beiden Geraden und überprüfe das Resultat anhand der Zeichnung.

E Wiederhole Aufgabe 5C-D, indem du die Gerade g_1 an der Geraden y = – x spiegelst.

---

7 Kärtchenaufgaben zu den Geraden



Kärtchenaufgabe zu den Geradengleichungen

A Links siehst du eine Kärtchenaufgabe. Auf der Vorderseite sind Formen eingezeichnet und Aufgaben formuliert, auf der Rückseite sind die entsprechenden Lösungen aufgeschrieben. Überprüfe die Lösungen.

B Lege andere Formen in das Koordinatensystem und formuliere eigene Kärtchenaufgaben samt Lösungen. Hier einige Anregungen:

- Punkte vorgeben und überprüfen, ob sie auf einer vorgegebenen Geraden liegen.
- Wertetabelle zu einer vorgegebenen Geraden aufstellen. Anhand der Wertetabelle die Geradengleichung formulieren.
- Im Koordinatensystem mehrere Geraden einzeichnen sowie Wertetabellen und Geradengleichungen vorgeben. Jeder Gleichung die entsprechende Wertetabelle und den entsprechenden Graphen zuordnen.
- Eine Situation aus dem Alltag zu gelegten Geraden erfinden und Berechnungen anstellen.

C Gebt einander die Kärtchen zum Lösen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Sich funktionale Zusammenhänge vorstellen	– Aus Graph die Funktionsgleichung bestimmen	mathbu.ch 9+	LU	4
K	Terme und Gleichungen umformen	– Schneiden von Geraden heisst dasselbe wie das Lösen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten	mathbu.ch 9+	LU	16
M	Gesetzmässigkeiten erkennen				
M	Argumentieren, begründen				

Zur Sache

Thema der Lernumgebung sind lineare Funktionen der Form $y = mx + b$. Dabei werden die geometrische Darstellung sowie die Interpretation von Steigung und Ordinatenschnittpunkt angeregt. Bei dieser Lernumgebung steht der formale Aspekt der Geradengleichungen im Vordergrund. Der Bezug zu Realsituationen darf keinesfalls vergessen werden (vgl. Weiterführendes).

Voraussetzungen

Die Schülerinnen kennen den Zusammenhang zwischen Realsituationen zu linearen Funktionen und der Darstellung im Koordinatensystem. Sie haben eine Vorstellung von der Bedeutung der Steigung einer Geraden und vom Achsenabschnitt. Sie kennen den Satz des Pythagoras und sie können mit einfachen Wurzeln rechnen.

Zum Unterricht

Wichtig sind die Einsichten, welche die Lernenden von den Graphen her gewinnen: Der zentrale Punkt ist, dass das Auffinden des Schnittpunktes zweier Geraden dasselbe ist wie das Lösen eines Systems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

1 Bei Aufgabe 1B können Steigung und Achsenabschnitt direkt aus der Figur abgelesen werden. Bei Aufgabe 1D sind Steigung und Achsenabschnitt nicht mehr rational.

2 Hier kommen erstmals Geraden mit negativer Steigung vor. Schwierigkeiten bereitet möglicherweise das Aufstellen der Geradengleichung für die vertikale Gerade g_3. Ihr Graph beschreibt keine Funktion!

3 Bei dieser Aufgabe geht es um die Erkenntnis, dass bei parallelen Geraden die Steigung konstant ist. Bei Aufgabe 3D treten in der Geradengleichung wie schon bei Aufgabe 1D irrationale Zahlen auf.

4 Haupterkenntnis bei Aufgabe 4 ist, dass das Produkt der Steigungen von zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden stets -1 ist.

5 6 Nachdem zuerst konstruktiv an Geraden und am Nullpunkt gespiegelt wird, steht die Auswirkung dieser Abbildungen auf die Form der Geradengleichung im Zentrum der Überlegungen. Die Graphen einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion f* liegen im Koordinatensystem stets symmetrisch zur Achse $y = x$.

7 Hier ist die Kreativität der Schülerinnen und Schüler gefragt.

Weiterführendes

Bei den Kärtchenaufgaben in Aufgabe 7 können die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert werden, Realsituationen zu linearen Gleichungen zu formulieren und diese grafisch oder auf rechnerischem Weg zu lösen. Aus Wertetabellen können die Grafen gezeichnet und die Geradengleichungen formuliert werden. Zu Graphen oder Wertetabellen können passende Geschichten gesucht werden.

Verschiedene Angebote mit Fixkosten können graphisch oder rechnerisch miteinander verglichen werden: Ab welcher Menge ist welches Angebot attraktiver (vgl. Lösungsbeispiel von Aufgabe 7)?

Lösungen

1 **B** g_1: $y = 2x + 10$

g_2: $y = 0.5x + 5$

C $P\,(-3\tfrac{1}{3}\,/\,3\tfrac{1}{3})$

D g_1: $y = \sqrt{2}\,x + 10\sqrt{2}$

g_2: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x + 10$

$P\,(10\sqrt{2} - 20\,/\,20 - 10\sqrt{2})$ oder gerundet $P\,(-5.86\,/\,5.86)$

---

2 **B** g_1: $y = -x + 10$

g_2: $y = 0.5x + 1$

g_3: $x = 8$

C $g_1 \cap g_2 = \{\,P\,(6\,/\,4)\,\}$

$g_1 \cap g_3 = \{\,P\,(8\,/\,2)\,\}$

$g_2 \cap g_3 = \{\,P\,(8\,/\,5)\,\}$

D Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

3 **B** g_1: $y = 2x$

g_2: $y = 2x + 4$

g_3: $y = 2x - 14$

C Alle drei Geraden haben die Steigung m = 2, weil sie parallel zueinander sind.

D g_1: $y = -\sqrt{3}\,x + 10\sqrt{3}$

g_2: $y = -\sqrt{3}\,x + 10\sqrt{6}$

---

4 **B,C** g_1: $y = -x + 10$ $\quad m = -1$

g_2: $y = x$ $\quad m = +1$

Die beiden Geraden stehen senkrecht zueinander.
Die beiden Steigungen haben verschiedene Vorzeichen.

D g_1: $y = -2x + 10$ $\quad m = -2$

g_2: $y = 0.5x$ $\quad m = +0.5$

Die beiden Geraden stehen senkrecht zueinander.
Die beiden Steigungen haben verschiedene Vorzeichen.
Die eine Steigung ist der Kehrwert der anderen Steigung mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Lösungen

5 **B** g_1: $y = 2x - 4$

C g_2: $y = -2x - 4$

D g_3: $y = -2x + 4$

E g_4: $y = 2x + 4$

F Bei der Steigung und/oder beim Achsenabschnitt ändert sich nur das Vorzeichen.

---

6 **B** g_1: $y = -0.5x + 5$

C g_2: $y = -2x + 10$

D $g_1 \cap g_2 = \{ P\ (3\tfrac{1}{3}\ /\ 3\tfrac{1}{3}) \}$

E g_3: $y = -2x - 10$

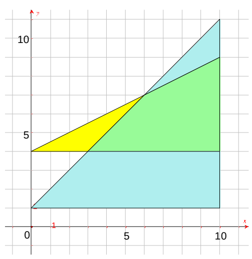
$g_1 \cap g_3 = \{ Q\ (-10\ /\ 10) \}$

---

7 **B** Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

Ein mögliches Beispiel könnte folgendermassen aussehen:

<u>Aufgabe</u>



Erfinde zu dieser Graphik eine passende Geschichte und stelle Berechnungen dazu an.

<u>Lösung</u>

Im Parkhaus Krone bezahlst du einen Festpreis von CHF 1.00. Jede Stunde parken kostet zusätzlich CHF 1.00.

Im Parkhaus Aare bezahlst du einen Festpreis von CHF 4.00. Jede Stunde parken kostet zusätzlich CHF 0.50.

Ab welcher Parkzeit ist das Parkhaus Aare günstiger?

Krone: $y = x + 1$ Aare: $y = 0.5\,x + 4$

$x + 1 = 0.5\,x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

Ab 6 Stunden parken ist das Parkhaus Aare günstiger.